

LA LOI TRONQUÉE ET L'AMÉNAGEMENT FORESTIER

par Robert B. CHEVROU

Résumé

L'auteur rappelle dans la 1^e partie les bases de la loi tronquée construite pour estimer les coupes futures réalistes dans des peuplements forestiers à partir des observations d'un inventaire forestier national. L'étroite relation entre les données observées, structure et évolution d'un peuplement forestier, et les paramètres estimés de la loi tronquée fonctionnellement liés aux principaux critères d'aménagement, conduit l'auteur à proposer l'utilisation inverse de la loi tronquée, c'est-à-dire le choix des critères d'aménagement pour calculer la structure et l'évolution du peuplement.

Dans la 2^e partie, il est montré comment l'aménagiste peut calculer les paramètres de la loi tronquée quand il a choisi les critères d'aménagement qui déterminent la structure et l'évolution du peuplement : âge d'exploitabilité, diamètre d'exploitabilité et taux d'éclaircie, associés à la production en volume connue ou estimée ; il peut en déduire les effectifs et les volumes sur pied et ceux des coupes annuelles (séparément éclaircies et coupe finale), par catégorie de diamètre et par classe d'âges, tant pour les peuplements jardinés que pour les peuplements réguliers équiennes.

L'auteur expose dans la 3^e partie les effets de choix variés des valeurs des critères d'aménagement sur la structure et l'évolution d'un peuplement calculées avec la loi tronquée. Il le fait pour chaque critère et met en relief, grâce à la loi tronquée, la pertinence de telle ou telle valeur choisie d'un même critère d'aménagement.

Abstract

In the first part the author recalls the main features of the truncated law which provides a realistic estimation of future cuttings in forest stands using the results of a national forest inventory. The close relationship between field data, that is observed forest stand structure and evolution, and the estimated parameters of the truncated law, functionally linked to the main management criteria, leads the author to propose an opposite use of the truncated law, that is the selection of management criteria to compute stand structure and evolution.

In the second part the author shows how the forest manager can compute the truncated law parameters once he has selected the management criteria determining stand structure and evolution: rotation age, average diameter of trees at rotation age, thinning ratio, linked to volume growth (known or estimated); he can infer the numbers of trees of the stand and their volume as well as those for the annual cuttings (separately thinnings and final cut) for each diameter class and each age class, for a stand managed either with the selection system or as a regular stand.

The author shows in the third part the outcomes of the different values computed with the truncated law of the stand features for each management criterion to bring out the relevance of chosen criterion values.

Mots clés : critères d'aménagement, structure et évolution d'un peuplement.

Key words : management criteria, forest stand structure and evolution.

1 - Rappel introductif sur la "loi tronquée"

Dans le cadre des travaux de statistique et de modélisation sur les différents types de peuplements forestiers de l'Hexagone qu'il a été amené à conduire pour l'Inventaire Forestier National (IFN), l'auteur a mis au point la "loi tronquée" (de distribution des nombres d'arbres par catégorie de diamètre), que ce soit pour une forêt (par exemple, une forêt communale d'une à quelques centaines d'hectares), ou, à un niveau supérieur, pour un type de peuplements forestiers (comme les "sapinières domaniales et communales traitées en futaie régulière équienne du département des Vosges", ensemble couvrant 40.844 hectares, ou les sapinières privées du pays de Sault du département de l'Aude couvrant 4.780 hectares – Chevrou, 1990a, Chevrou, 2013).

Cette recherche a été initiée dans les années 80 pour répondre à la demande faite à l'IFN de déterminer, département par département, les "disponibilités forestières" (Chevrou et al., 1988), c'est-à-dire les volumes de bois susceptibles d'être extraits au fil du temps à partir des différents types de forêt (comme celles citées ci-dessus) ; cet objectif étant particulièrement important pour les peuplements irréguliers "jardinés" de montagne où les âges des arbres sont inconnus ou mal connus.

Pour ce faire, il convenait:

- d'avoir, pour l'ensemble des types de peuplements d'une région forestière, une loi générale de distribution des nombres (effectifs) d'arbres par catégorie de diamètre pouvant s'adapter au mieux aux données recueillies sur le terrain par l'IFN ;
- d'ajuster cette loi à chaque type de peuplements d'une région forestière – c'est-à-dire de déterminer la valeur des paramètres de la loi pour ce type - à partir des données recueillies par l'IFN (nombres d'arbres, volumes correspondants de bois sur pied et accroissements diamétraux par catégorie de diamètre) ;
- et de l'appliquer à chaque type de peuplements, pour estimer la production en bois de celui-ci à partir de l'évaluation globale des trois critères principaux de son aménagement, à savoir l'âge d'exploitabilité, le diamètre d'exploitabilité (c'est-à-dire le diamètre moyen des arbres atteignant l'âge d'exploitabilité, et, par extension, celui des arbres les plus âgés), et le taux d'éclaircie. De même que les sondages d'opinion font ressortir une "moyenne globale" des comportements des nombreux individus interrogés, l'auteur considère qu'il est raisonnable de prendre en compte la "moyenne globale" des critères d'aménagement adoptés, délibérément ou non, par les nombreux aménagistes divers d'un même type de peuplements forestiers couvrant une grande surface. Et ce d'autant plus, par exemple, que les sapinières du département des Vosges sont gérées par des forestiers ayant reçu une formation académique homogène et appartenant à un organisme hiérarchisé, l'Office National des Forêts (ONF) ; ou les sapinières privées du Pays de Sault où les conditions écologiques et économiques imposent sur une zone restreinte la production de produits forestiers relativement homogènes pour les industries locales.

La «doxa» forestière avait été jusque-là d'utiliser la "loi de Liocourt", un forestier français du 19ème siècle (cf. Dulieu, 2016 pour l'origine de cette "loi") ; cette "loi" donne une valeur constante au rapport des effectifs des arbres de deux catégories successives de diamètre, c'est-à-dire :

$$N_{i-1}/N_i = q,$$

où :

- N_{i-1} et N_i sont les effectifs des catégories de diamètre médian $5(i-1)$ cm et $5i$ cm (dans le cas de catégories de diamètre de largeur 5 cm),

- et q , le q -ratio des anglophones, est, pour chaque type de peuplements, une constante supérieure à 1 quel que soit i ; la valeur moyenne classique étant de 1,4 ;

l'usage étant de "tronquer" cette loi "par une valeur minimale des diamètres, dite diamètre de recensabilité ou de précomptage, et par une valeur maximale des diamètres quelque peu arbitraire et qui correspond au diamètre médian de la catégorie au-delà de laquelle les effectifs des catégories sont inférieurs à 0,5 (valeur arrondie égale à 0) sur une surface de référence prise égale à 1 ha".

Comme plusieurs auteurs avant lui (notamment Assmann, 1970), l'auteur et son collègue J. M. Delord de l'IFN ont constaté que la "loi de Liocourt" s'ajuste rarement aux données observées. Il a donc été nécessaire de trouver un autre modèle qui soit, en plus, explicatif.

L'auteur a alors mis au point ce qu'il nomme au départ la "loi tronquée de Liocourt" (cf. titres de ses deux articles initiaux, Chevrou, 1990a, Chevrou, 1990b), et qu'il désigne plus simplement "loi tronquée" dans les articles suivants sur le sujet. La loi est dite "tronquée" parce que l'âge des arbres est strictement limité par une valeur maximum, l'âge d'exploitabilité, au contraire de la "loi de Liocourt" dont l'âge maximum n'est qu'indicatif.

Cette nouvelle "loi", dérivée de la loi de Poisson, s'exprime par la formule suivante :

$$N_i = \frac{1}{(1+\alpha)} \left[N_{i-1} - \frac{\alpha M e^{-(1+\alpha)\beta} \beta^i}{i!} \right] \quad \text{avec : } N_0 = \frac{\alpha M}{(1+\alpha)} [1 - e^{-(1+\alpha)\beta}]$$

où :

- N_i est le nombre d'arbres dans la catégorie de diamètre $5i$ cm (i entier positif)
- M est un coefficient de proportionnalité ;
- α (> -1) et β (> 0) sont deux paramètres de la "loi tronquée".

La valeur du paramètre α traduit le "recrutement" récent (c'est-à-dire les nombres d'arbres des catégories inférieures de diamètre), soit encore le taux d'éclaircie annuel moyen, rapport entre le volume prélevé en éclaircie et le volume sur pied. Alors que le paramètre β est lié au rythme de décroissance des effectifs dans les catégories supérieures, soit encore à l'âge maximum et au diamètre des arbres les plus âgés. Il faut noter que la décroissance des effectifs dans les plus grandes catégories de diamètre $d=5i$ cm se fait comme $1/i$ avec la "loi tronquée" ($N_i/N_{i-1} \leq \beta/i$), donc beaucoup plus rapide qu'avec la "loi de Liocourt" et sa constante q : $N_i/N_{i-1} = 1/q$.

La "loi tronquée" s'exprime aussi par une autre formule (dont les 2 précédentes sont tirées par intégration sur l'âge entre 0 et βc années, l'âge maximum des arbres du peuplement forestier) qui fait apparaître l'âge a des arbres, et un troisième paramètre, c , lié à l'accroissement diamétral moyen annuel des arbres de même âge égal à $5/c$ cm/an :

$$N_i(a) = \left(\frac{\alpha M}{c} \right) \frac{e^{-(1+\alpha)\frac{a}{c}} \left(\frac{a}{c} \right)^i}{i!}$$

A la fin des années 80, la "loi tronquée" a été testée sur la plupart des sapinières et pessières inventoriées par l'IFN pour la confronter à la "loi de Liocourt", laquelle fut à l'origine établie spécialement pour ces peuplements. Il est apparu que la "loi tronquée" s'ajuste beaucoup mieux aux données que sa concurrente, et qu'elle fournit plus de renseignements sur ces forêts. Néanmoins, la "loi de Liocourt" s'avère adaptée lorsque l'âge maximum des arbres et le diamètre des plus âgés sont élevés, c'est-à-dire quand le paramètre β est lui-même élevé. Elle est en fait un cas particulier de la

"loi tronquée" lorsque β , et l'âge d'exploitabilité βc qui lui est lié, tendent vers l'infini, sa constante q étant alors égale à $1+\alpha$.

A partir donc des observations d'un inventaire (effectifs, volumes, et accroissements diamétraux par catégorie de diamètre), la "loi tronquée" estime les trois critères principaux d'aménagement des peuplements que sont : l'âge d'exploitabilité, le diamètre d'exploitabilité et le taux d'éclaircie, sur l'ensemble des forêts considérées.

L'ajustement des paramètres de la "loi tronquée" aux données des 17 groupes de sapinières et pessières du massif du Jura a montré que leurs diamètres d'exploitabilité effectifs sont élevés dans les forêts domaniales et communales (45 à 60 cm) et que les éclaircies y sont fortes ; et qu'ils sont plus faibles dans les forêts privées (Chevrou, 1992). Au niveau d'une forêt individuelle, comme la forêt communale de Bonne-sur-Menoge (112 ha) en Haute-Savoie, à partir des données des inventaires effectués en 1926, 1947 et 1973, cet ajustement a montré une permanence de la valeur du diamètre d'exploitabilité (46 à 47 cm), et des éclaircies de plus en plus faibles (Chevrou, 1990b).

Un observateur extérieur au milieu forestier pourrait croire que les aménagements des peuplements forestiers cités plus haut (Vosges, Aude, etc.) ont été rédigés en prenant pour base la "loi tronquée", du fait de l'étroite relation existant entre les données observées, structure et évolution des peuplements, et les paramètres estimés de la "loi tronquée" qui conduisent aux valeurs calculées des critères d'aménagement.

L'auteur considère aussi, et c'est la matière de l'article qui suit, une autre application, *inverse*, de la "loi tronquée", à savoir que les principaux critères d'aménagement étant fixés - âge d'exploitabilité, diamètre d'exploitabilité et taux d'éclaircie -, associés à la production annuelle en volume, on peut déterminer pour ce peuplement :

- les paramètres de la "loi tronquée",
- et, à partir de là, la structure et l'évolution du peuplement en fonction des critères d'aménagement : répartition des effectifs et des volumes par classe d'âges et par catégorie de diamètre, ainsi que les effectifs et volumes prélevés en éclaircie et en coupe finale.

Cette relation directe entre les paramètres de la "loi tronquée" et les critères d'aménagement justifie l'intérêt de cette loi qui permettrait de faire rapidement un bilan de différents choix d'aménagement. L'auteur en appelle à la sagacité des lecteurs pour apprécier cette approche consistant à décrire la structure et l'évolution d'un peuplement forestier à l'aide de la "loi tronquée" lorsque les trois principaux critères d'aménagement sont choisis et la production estimée.

2 - Exposé de la recherche

Cette recherche s'adresse plus aux aménagistes qu'aux gestionnaires.

L'aménagiste tient compte de l'état constaté de la forêt et de son environnement ; il vise à la conduire, dans un futur plus ou moins éloigné (10, 20 ans, voire plus), à un certain état idéalisé d'équilibre ; il choisit les critères d'aménagement pour ce faire et il édicte les règles de gestion correspondantes. Le gestionnaire s'efforcera ensuite d'appliquer ces règles ; mais il se heurte au réel et à ses aléas, certains assez dramatiques pour nécessiter la révision de l'aménagement.

En futaie régulière, l'état d'équilibre est l'égalité des surfaces couvertes par les arbres des différents âges ou différentes classes d'âges. Les effectifs et les volumes sur pied découlent des critères

d'aménagement (âge d'exploitabilité, diamètre d'exploitabilité, taux d'éclaircie) et de la production en volume :

- les coupes d'éclaircie et d'amélioration réduisent progressivement les effectifs et enlèvent les arbres les moins productifs dans les parcelles n'ayant pas atteint l'âge d'exploitabilité ;
- la coupe finale enlève dans les parcelles ayant atteint l'âge d'exploitabilité tous les arbres qui sont remplacés par des semis naturels ou des plants.

En futaie jardinée, l'état d'équilibre est déterminé par un choix de distribution des effectifs et des volumes par catégorie de diamètre. Les distributions autres que la "loi tronquée" n'ont pas de relation directe avec les critères d'aménagement qui sont choisis de façon assez vague, les règles de gestion l'étant aussi pour ce qui concerne les effectifs et les volumes des coupes d'éclaircie et finale : l'âge d'exploitabilité et le diamètre d'exploitabilité ne sont qu'indicatifs quand ils sont définis, car on ne prélève pas systématiquement les arbres atteignant l'âge d'exploitabilité comme on le fait en futaie régulière. De ce fait, le taux d'éclaircie n'a pas de sens, car toutes les coupes s'apparentent à des éclaircies. La méthode "d'aménagement par affectation" destinée à pallier les inconvénients d'un tel choix de distribution n'a pas donné les résultats escomptés (De Liocourt, 1898) parce que les coupes étaient trop faibles et la régénération non acquise dans la durée définie : cette méthode d'aménagement consiste à désigner une partie des peuplements, la plus âgée sur $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ de la surface de la forêt, partie qui sera coupée et régénérée progressivement en une durée déterminée, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ de l'âge d'exploitabilité ; dans l'autre partie, on ne fait que des éclaircies d'amélioration.

2.1 – Calcul des paramètres de la "loi tronquée" à partir des critères d'aménagement

La "loi tronquée" a 4 paramètres M , α , β et c (voir formulaire in fine) :

- c ($c > 0$) est une durée liée aux accroissements diamétraux. L'accroissement diamétral moyen des arbres de même âge est égal à $5/c$ (5 est la largeur des catégories de diamètre en cm), et égal à DE/AE (AE =âge d'exploitabilité ; DE diamètre moyen des arbres d'âge AE).
- β ($\beta > 0$) est un nombre lié à l'âge maximum des arbres (âge d'exploitabilité ou de sénescence AE) estimé par $\beta = AE/c$; $5\beta = DE$ est le diamètre moyen en cm des arbres âgés de AE années.
- α est un nombre supérieur à -1 : $\alpha \geq 0$ est lié au taux de prélèvement annuel, rapport du volume prélevé en éclaircie sur le volume sur pied, égal à $(1 - e^{-\alpha/c}) \cong \alpha/c$; si $\alpha < 0$, le peuplement est déséquilibré et ne contient pas assez de jeunes arbres.
- M est un nombre (tel que αM positif et de valeur finie), αM étant proportionnel à la densité du peuplement (effectifs totaux et volume total sur pied par hectare), et $\alpha M/c$ proportionnel à la production en volume.

Ces paramètres permettent de décrire une futaie jardinée équilibrée aussi bien qu'une futaie régulière équilibrée dont les effectifs/ha décroissent quand l'âge augmente et se répartissent par catégorie de diamètre à un âge donné selon une loi de Poisson, si bien que le diamètre moyen $d(a)$ des arbres de même âge augmente proportionnellement à l'âge a : $d(a) = 5a/c$.

La loi de Liocourt, $N_{i+1} = N_i/q$, est un cas particulier de la loi tronquée : le paramètre q est alors égal à $(1+\alpha)$. La valeur de β est infinie et l'âge d'exploitabilité AE , égal à βc , est infiniment grand, donc irréaliste, ce qui entraîne l'absence de coupe finale et les coupes ne sont alors que des éclaircies. Il est alors impossible de comparer la structure du peuplement jardiné à celle d'un peuplement régulier de mêmes paramètres dont l'âge d'exploitabilité est limité.

Si $\alpha > 0$, l'éclaircie prélève chaque année dans chaque classe d'âges et chaque catégorie de diamètre une proportion égale à α/c (y compris la mortalité). La coupe finale prélève chaque année tous les arbres âgés de βc années. Le rapport du volume annuel de l'éclaircie sur le volume annuel total de ces deux types de coupes est le "taux global d'éclaircie" qui est indépendant de la valeur de M .

Les valeurs des 4 paramètres M , α , β et c sont calculées successivement à partir des 3 critères d'aménagement et de la production : le diamètre d'exploitabilité (5β) donne la valeur de β ; l'âge d'exploitabilité (βc) donne la valeur de c ; le taux global d'éclaircie donne la valeur de α par un calcul itératif indépendant de la valeur de M ; la production donne enfin la valeur de αM .

Du fait que la "loi tronquée", aussi bien que la "loi de Liocourt" ignorent la hauteur des arbres, le volume d'une tige est exprimé en fonction du diamètre seul. Le volume v (en m^3) de l'arbre de diamètre d (en mètres) est calculé ici par la formule : $v = 11 d^{2.2}$.

2.2 – Détermination de la structure et de l'évolution d'un peuplement en fonction des critères d'aménagement

La production et la densité du peuplement

Comme indiqué au § 2.1, la densité détermine la valeur de αM . Modifier la densité revient à modifier αM , les effectifs et les volumes dans la même proportion. Inversement, si la densité d'un peuplement paraît "irréaliste", on peut modifier la valeur de αM pour augmenter ou réduire les effectifs et les volumes par hectare.

Ou bien on doit abandonner les critères d'aménagement : dans ce cas, conserver la production initiale, proportionnelle à $\alpha M/c$, conduit à modifier certains des paramètres α , c , et M , donc le taux d'éclaircie, l'accroissement diamétral moyen et la densité, voire même le paramètre β , c'est-à-dire le diamètre d'exploitabilité et l'âge d'exploitabilité.

On constate ainsi qu'une densité ou une production fixée détermine l'enveloppe des valeurs "réalistes" des paramètres de la "loi tronquée" et des critères d'aménagement.

Les coupes et leur rentabilité

La ventilation des effectifs entre éclaircie et coupe finale dans le peuplement équienne permet de donner aux arbres de même diamètre des valeurs financières différentes selon le type de coupe ; le marteleur marque en éclaircie les arbres de moindre valeur lorsque le choix est possible.

Le critère "taux global d'éclaircie" ne semble pas pertinent en futaie jardinée ; néanmoins, le marteleur agit de façon similaire à celle adoptée en futaie équienne pour les arbres de moindre valeur ; ainsi la ventilation entre éclaircie et coupe finale peut être utile pour estimer les valeurs des produits récoltés en futaie jardinée.

A partir des critères d'aménagement, la "loi tronquée" permet donc de calculer la valeur financière des coupes d'après les volumes et les dimensions des arbres prélevés en éclaircie et en coupe finale, ainsi que d'après les frais de gestion et d'exploitation. Il est alors possible d'affecter à chaque groupe de critères d'aménagement la valeur correspondante du revenu annuel et de comparer leurs rentabilités.

Les valeurs des bois récoltés sont ici artificiels :

- en éclaircie : 2 €/ m^3 pour les arbres de 20 cm à 25 cm ; 10 €/ m^3 pour les 30 à 35 cm ; et 25 €/ m^3 pour les 40 et plus ;

- en coupe finale : 5 €/ m³ pour les 20 à 25 cm ; 25 €/ m³ pour les 30 à 35 cm ; et 50 €/ m³ pour les 40 cm et plus.

Le type d'éclaircie

La "loi tronquée" suppose que l'éclaircie prélève les arbres dans les classes d'âges au prorata des effectifs par catégorie de diamètre comme en futaie jardinée où les âges des arbres ne sont pas connus.

Exemple de structure et d'évolution d'un peuplement d'après la "loi tronquée"

- La production par hectare est de 9 m³/ha/an.
- L'âge d'exploitabilité est 120 ans.
- Le diamètre d'exploitabilité est de 40 cm.
- Le taux global d'éclaircie est de 50%.

Le tableau 1 donne les valeurs des paramètres de la "loi tronquée" calculés comme exposé au § 2.1.

Chacune des 10 classes d'âges de la futaie régulière présentée dans le tableau 2 couvre 1 hectare pour faciliter la comparaison des totaux avec ceux des 10 hectares de la futaie jardinée du tableau 3.

La dernière colonne du tableau 3 donne les effectifs d'une "loi de Liocourt" de paramètre 1,3985 dont l'effectif total, le volume total et la production sont égaux à ceux de la "loi tronquée" décrite ici. En pratique, on ne donne pas autant de décimales aux paramètres de ces 2 lois, mais il s'agit de comparer les résultats avec une précision utile. La colonne intitulée " Δd mm/an" donne les valeurs des accroissements diamétraux moyens des arbres d'une même catégorie de diamètre.

Noter la réduction très rapide des effectifs donnés par la "loi tronquée" pour les catégories de diamètre élevées (0,5 arbre de 90 cm et +) comparée à celle de la "loi de Liocourt" (21 arbres de 90 cm et +).

Tableau 1 : paramètres de la "loi tronquée"

αM	α	β	c	α/c %
235,75	0,2232	8,0	15,0	1,5 %

Tableau 2 : futaie régulière, classes d'âges de surfaces 1 hectare

Classe d'âges	Effectifs	Volumes m ³	Vol éclaircie m ³ /an	d moyen cm
0 à 12 ans	1727	17	0,3	1,9
12 à 24	1445	70	1,0	5,9
24 à 36	1208	140	2,1	9,9
36 à 48	1011	217	3,2	13,9
48 à 60	845	292	4,3	17,9
60 à 72	707	361	5,4	21,9
72 à 84	592	421	6,3	25,9
84 à 96	495	469	7,0	29,9
96 à 108	414	506	7,5	33,9
108 à 120	346	531	7,9	37,9
Totaux	8790	3024	45,0	

Tableau 3 : futaie jardinée sur 10 hectares

catégorie de diamètre	Effectifs	Volume total	N coupe finale/an	N coupe éclaircie/an	Δd mm/an	Age moyen	Effectifs Liocourt
0	1927	0	0,01	28,7	4,1	12,3	2505
5	1575	24	0,1	23,4	4,1	24,5	1791
10	1284	89	0,3	19,1	4,1	36,5	1281
15	1040	176	0,8	15,5	4,1	48,0	916
20	832	265	1,5	12,4	4,2	58,6	655
25	650	339	2,4	9,7	4,3	68,1	468
30	492	383	3,2	7,3	4,4	76,2	335
35	357	390	3,7	5,3	4,6	83,0	239
40	247	362	3,7	3,7	4,8	88,5	171
45	162	307	3,3	2,4	5,1	92,9	122
50	100	240	2,6	1,5	5,4	96,5	88
55	59	173	1,9	0,9	5,7	99,4	63
60	32	116	1,3	0,5	6,0	101,8	45
65	17	72	0,8	0,3	6,4	103,8	32
70	8	42	0,4	0,1	6,7	105,4	23
75	4	23	0,2	0,1	7,1	106,7	16
80	2	12	0,1	0,03	7,5	107,9	12
85	1	6	0,1	0,01	7,9	108,9	8
90 et +	0,5	4,5	0,04	0,00	8,3	109,7	21
Effectifs	8790		26,3	130,8	Age maximum : 120 ans		8790
Volumes		3024	45,00	45,00			3024
Valeur des produits			2001 €	638 €			

Si pour les plus petites catégories de diamètre d l'accroissement diamétral Δd varie peu, il augmente rapidement pour celles supérieures au diamètre d'exploitabilité $5\beta = 40$ cm, et tend en valeur supérieure vers l'asymptote $d/\beta c$, parce que l'âge est limité par l'âge d'exploitabilité βc .

Avantages de la "loi tronquée" par rapport à la "loi de Liocourt"

Les avantages de la loi tronquée sont de plusieurs types pour gérer une futaie jardinée.

- D'abord, elle décrit la structure d'une futaie régulière de mêmes paramètres (évolution des effectifs, diamètres moyens, volumes et accroissements par hectare par classe d'âges), ce qui permet de juger facilement la pertinence du choix des paramètres de la "loi tronquée" appliqués au peuplement jardiné.
- Ensuite, elle décrit correctement l'évolution de l'accroissement diamétral Δd et du temps de passage $t=5/\Delta d$ par catégorie de diamètre, difficilement explicable par les autres lois de répartition des effectifs par catégorie de diamètre : l'accroissement diamétral augmente et le temps de passage diminue quand le diamètre augmente comme on peut le constater sur les arbres de différents diamètres atteignant l'âge d'exploitabilité AE : $\Delta d=d/AE$ et $t=5AE/d$. La "loi de Liocourt" donne un accroissement diamétral et un temps de passage constants, car l'âge d'exploitabilité $AE= \beta c$ n'est pas limité pour cette distribution.

- Enfin, elle donne les effectifs à couper annuellement par catégorie de diamètre en distinguant ceux à prélever au titre de la coupe finale, les plus âgés, et ceux au titre des éclaircies. Sur le terrain, bien entendu, les âges ne sont pas connus en futaie jardinée, et le marteleur doit utiliser son expérience et juger l'âge d'après l'état de l'arbre, mais il restera toujours quelques arbres plus âgés que l'âge d'exploitabilité.
- Les partisans convaincus de la "loi de Liocourt" noteront que la répartition des effectifs par catégorie de diamètre donnée par la "loi tronquée" ne s'éloigne pas beaucoup de celle donnée par la "loi de Liocourt", si ce n'est que celle-là augmente les effectifs des bois moyens et réduit fortement ceux des très gros arbres.

3 – Résultats de la recherche

Les résultats ci-après illustrent les principes de la "loi tronquée" avec divers choix de critères d'aménagement et leurs effets sur les distributions en futaie régulière et futaie jardinée.

Les peuplements sont étudiés en ne modifiant qu'un critère d'aménagement pour simplifier les comparaisons et les commentaires qui les suivent.

Les tableaux se présentent sous la forme suivante :

Tableau 4 : présentation des résultats

Critère d'aménagement ↓	Les paramètres permettent de calculer les effectifs, les volumes, les coupes, la production en volume, les âges moyens et les accroissements diamétraux par catégorie de diamètre				
	M	α	β	c	α/c %
<i>Valeurs critère</i>	<i>Valeurs des paramètres</i>				<i>Valeur</i>
Futaie équienne	N/ha, V m ³ /ha 1 ^e classe d'âges		N/ha, V m ³ /ha 10 ^e classe d'âges		$\Delta d = 5/c$
<i>Valeurs critère</i>	<i>Valeurs de N/ha et V m³/ha</i>		<i>Valeurs de N/ha et V m³/ha</i>		<i>Valeur</i>
Futaie jardinée	N/ha total	N20/ha	d20 cm	Valeurs des coupes €/an	
<i>Valeurs critère</i>	<i>Valeurs de N/ha, N20/ha et d20</i>			<i>Valeur</i>	<i>Valeur</i>

Les informations utiles aux aménagistes sont résumées dans ces tableaux :

- Le taux de prélèvement annuel α/c ;
- l'accroissement diamétral moyen des arbres de même âge : $\Delta d = 5/c$ en mm/an ;
- les effectifs et volumes par hectare (N/ha et V m³/ha) des premières et dernières classes d'âges dont on peut déduire l'évolution approximative au cours du temps ; les largeurs des 10 classes d'âges sont de 8, 12 ou 16 ans selon l'âge d'exploitabilité (80, 120 et 160 ans) ;
- l'effectif total par hectare tous diamètres N/ha, et celui des arbres de 20 cm et plus N20/ha, d'où l'on déduit par soustraction l'effectif des arbres de moins de 20 cm, donc la densité de la régénération ;
- enfin le diamètre moyen des arbres de 20 cm et plus, d20 cm, qui indique globalement la répartition des effectifs par catégorie de diamètre.

Les figures illustrent d'autres aspects du peuplement utiles aux aménagistes : volume par hectare en fonction de l'âge et des catégories de diamètre, accroissements diamétraux par catégorie de diamètre.

3.1 - Structure et évolution du peuplement en fonction du diamètre d'exploitabilité

- La production par hectare est de 9 m³/ha/an dans tous les cas.
- L'âge d'exploitabilité est 120 ans.
- Le taux global d'éclaircie est de 50%.
- **Les diamètres d'exploitabilité sont de 30, 40 et 50 cm.**

Tableau 5 : diamètre d'exploitabilité varié

Diamètre d'exploitabilité	Paramètres				
	M	α	β	c	α/c %
30 cm	1875	0,2929	6	20	1,50%
40 cm	1056	0,2232	8	15	1,50%
50 cm	671	0,1805	10	12	1,50%
Futaie équienne Figure 1a	N/ha 1 ^e classe d'âges	V m ³ /ha 1 ^e classe d'âges	N/ha 10 ^e classe d'âges	V m ³ /ha 10 ^e classe d'âges	$\Delta d = 5/c$ mm/an
30 cm	3022	20	621	531	2,5
40 cm	1727	17	346	531	3,3
50 cm	1108	15	218	531	4,2
Futaie jardinée : Figure 1b	N/ha total	N_{20}/ha	d_{20} cm	Valeurs des coupes €/an	
				Coupe finale	Eclaircie
30 cm	1552	363	27,1	161	43
40 cm	879	296	30,3	200	64
50 cm	561	235	33,6	217	79

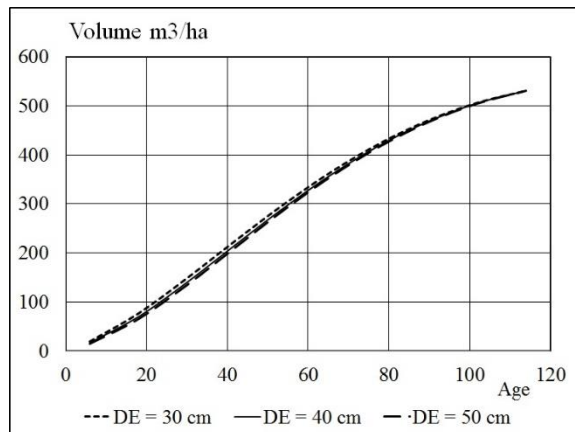


Figure 1a : diamètre d'exploitabilité varié : volumes par âge m³/ha

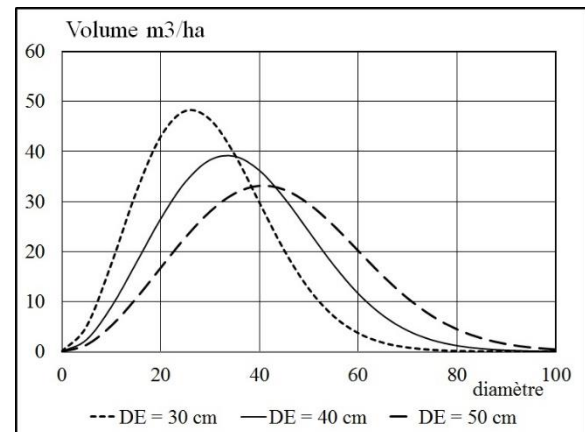


Figure 1b : diamètre d'exploitabilité varié : volumes m³/ha par diamètre

Commentaires

- Le résultat principal : Les volumes moyens par classe d'âges sont identiques.
- Les accroissements diamétraux moyens Δd sont très différents : 2,5, 3,3 et 4,2 mm/an.
- Les effectifs par classe d'âges sont très différents car il y a beaucoup de petits arbres lorsque le diamètre d'exploitabilité est faible.
- Pour un peuplement dense et un taux global d'éclaircie de 50%, on conduit le peuplement à un diamètre moyen de 30 cm à 120 ans ; avec un jeune peuplement clair et un taux global d'éclaircie de 50 %, on conduit le peuplement à un diamètre moyen de 50 cm à 120 ans.

- Les effectifs et les volumes par catégorie de diamètre sont très différents, beaucoup plus élevés pour les plus petits arbres lorsque le diamètre d'exploitabilité est plus faible.

3.2 - Structure et évolution du peuplement en fonction de l'âge d'exploitabilité

- La production par hectare est de 9 m³/ha/an dans tous les cas.
- Le taux global d'éclaircie est de 50%.
- Le diamètre d'exploitabilité est de 40 cm.
- **Les âges d'exploitabilité sont de 80 ans, 120 ans, et 160 ans.**

Tableau 6 : âge d'exploitabilité varié

Age d'exploitabilité	Paramètres				
	M	α	β	c	α/c %
80 ans	704	0,2232	8	10	2,23%
120 ans	1056	0,2232	8	15	1,50%
160 ans	1408	0,2232	8	20	1,10%
Futaie équienne	N/ha 1 ^e classe d'âges	V m ³ /ha 1 ^e classe d'âges	N/ha 10 ^e classe d'âges	V m ³ /ha 10 ^e classe d'âges	$\Delta d = 5/c$ mm/an
80 ans	1151	11	231	354	5,0
120 ans	1727	17	346	531	3,3
160 ans	2303	23	462	708	2,5
Futaie jardinée : Figures 2a et 2b	N/ha total	N_{20}/ha	d_{20} cm	Valeurs des coupes €/an	
				Coupe finale	Eclaircie
80 ans	586	198	30,3	200	64
120 ans	879	296	30,3	200	64
160 ans	1172	395	30,3	200	64

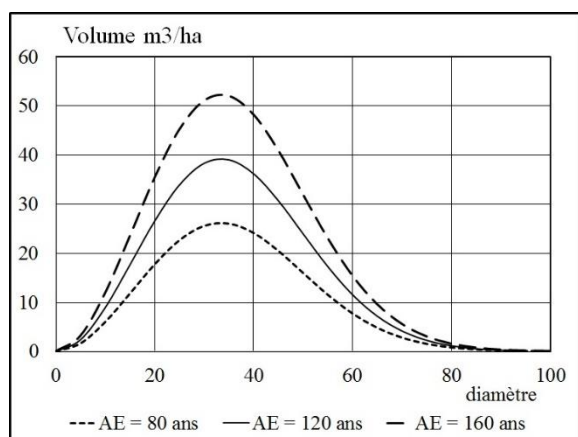


Figure 2a : âge d'exploitabilité varié : volumes m³/ha par diamètre

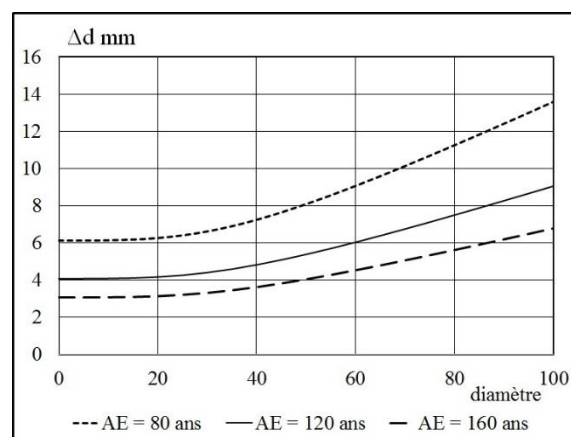


Figure 2b : âge d'exploitabilité varié : accroissement diamétral moyen par diamètre mm/an

Commentaires

- Le résultat principal : Les volumes annuels prélevés en éclaircie par catégorie de diamètre sont identiques et ceux des coupes finales le sont aussi.
- Pour un diamètre d'exploitabilité identique (50 cm) et des âges d'exploitabilité différents, les diamètres moyens sont identiques.
- Les accroissements diamétraux moyens Δd sont très différents : 5,0, 3,3 et 2,5 mm/an.
- Les valeurs du taux de prélèvement annuel, α/c (de 1,1 à 2,2 %), peuvent conduire à l'adoption de rotations de durées différentes, plus grandes pour les plus grands âges d'exploitabilité.

3.3 - Structure et évolution en fonction du taux global d'éclaircie

- La production par hectare est de 9 m³/ha/an dans tous les cas.
- L'âge d'exploitabilité est 120 ans.
- Le diamètre d'exploitabilité est de 40 cm.
- **Les taux globaux d'éclaircie sont de 25%, 50% et 75%.**

Tableau 7 : taux global d'éclaircie varié

Taux global d'éclaircie	Paramètres				
	M	α	β	c	$\alpha/c \%$
25%	1317	0,1008	8	15	0,67%
50%	1056	0,2232	8	15	1,50%
75%	1202	0,3985	8	15	2,66%
Futaie équienne	N/ha 1 ^e classe d'âges	$V m^3/ha$ 1 ^e classe d'âges	N/ha 10 ^e classe d'âges	$V m^3/ha$ 10 ^e classe d'âges	$\Delta d = 5/c$ mm/an
25%	1020	10	494	759	3,3
50%	1727	17	346	531	3,3
75%	3281	32	186	285	3,3
Futaie jardinée : Figures 3a et 3b	N/ha total	N_{20}/ha	d_{20} cm	Valeurs des coupes €/an	
				Coupe finale	Eclaircie
25%	729	312	31,4	300	35
50%	879	296	30,3	200	64
75%	1152	265	28,8	100	82

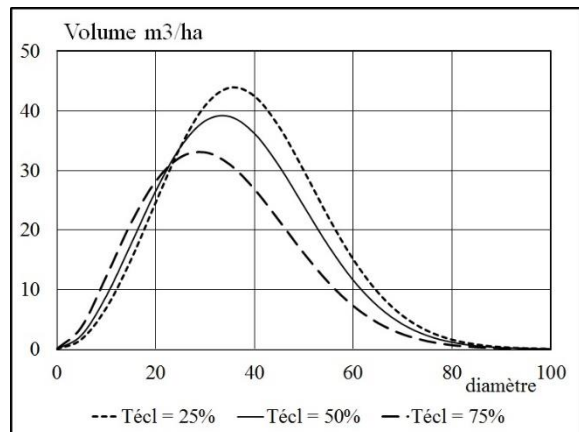


Figure 3a : taux global d'éclaircie varié : volumes m³/ha par diamètre

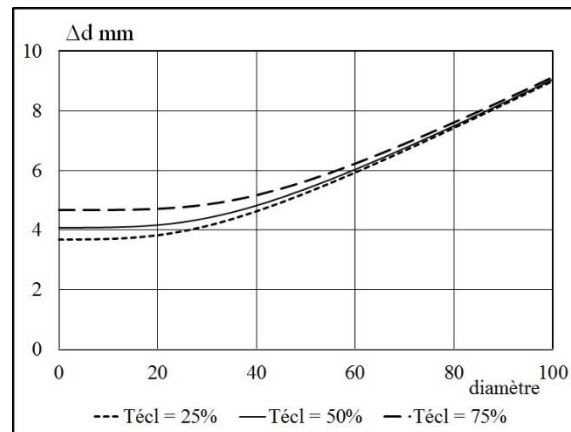


Figure 3b : taux global d'éclaircie varié : accroissement diamétral moyen par diamètre mm/an

Commentaires

- Les diamètres moyens des coupes finales sont égaux, mais les volumes très différents.
- Malgré les grandes différences des taux d'éclaircie, les volumes et les accroissements diamétraux par catégorie de diamètre ne sont pas très différents. L'effet du taux d'éclaircie (qui ne semble pas pertinent – voir la remarque initiale sur les coupes) s'avère donc faible.
- Les accroissements diamétraux moyens Δd sont identiques : 3,3 mm/an.
- Les valeurs du taux de prélèvement annuel, α/c (de 0,7 à 2,7 %), peuvent conduire à l'adoption de rotations de durées différentes.

4. - Conclusion

La "loi tronquée" lie la distribution des effectifs par catégorie de diamètre aux critères d'aménagement et précise ainsi les règles de gestion. Ses hypothèses ont été choisies pour faciliter la formulation des résultats et elles ne sont pas très éloignées de la structure constatée dans les peuplements réguliers équilibrés :

- l'effectif par hectare diminue régulièrement quand l'âge augmente jusqu'à l'âge d'exploitabilité qui est l'âge maximum des arbres du peuplement ;
- l'effectif par catégorie de diamètre $d=5i$ (où i est un nombre entier et 5 la largeur des catégories de diamètre en cm) à l'âge a suit une loi de Poisson de paramètre a/c .

Outre les avantages de la "loi tronquée" cités en fin du § 2.2 pour aménager et gérer une futaie jardinée, on peut ajouter les suivants d'après les résultats précédents :

- Elle permet de comparer aisément les revenus issus de différents critères d'aménagement.
- Elle permettrait d'illustrer l'enseignement des méthodes d'aménagement :
 - la "loi tronquée" permet de traiter "dynamiquement" des exemples d'aménagement en modifiant à volonté et progressivement tel ou tel critère d'aménagement, et en s'inspirant des résultats présentés ci-dessus ;
 - La présentation pourrait utiliser le diaporama ou le cinérama pour montrer rapidement le changement des critères d'aménagement modifiés ;
 - Ce qui montrerait l'impact du choix des critères d'aménagement sur la densité du peuplement, sa structure, son évolution, le diamètre moyen des arbres, l'accroissement diamétral, la rotation des coupes et la valeur des produits récoltés.

Annexe : formulaire de la loi tronquée

$N(a)$ est l'effectif total tous diamètres à l'âge a :

$$N(a) = \left(\frac{\alpha M}{c}\right) e^{-\frac{\alpha a}{c}} \quad (1)$$

NB : Si $\alpha=0$, M prend la valeur "infini", mais αM reste fini.

$$N \text{ est l'effectif total de } 0 \text{ à } \beta c = AE \text{ ans : } N = M(1 - e^{-\alpha\beta}) \quad (2)$$

NB : Si $\alpha = 0$: $N = \alpha M \beta$ (NB : αM a une valeur finie supérieure à 0)

$N_i(a)$ est l'effectif à l'âge a dans la i^e catégorie de diamètre $5i$ cm (i est un entier positif) :

$$N_i(a) = \left(\frac{\alpha M}{c}\right) \frac{e^{-(1+\alpha)\frac{a}{c}} \left(\frac{a}{c}\right)^i}{i!} \quad (3)$$

N_i est l'effectif total tous âges, par intégration de (3), dans la i^e catégorie de diamètre $5i$:

$$N_0 = \frac{\alpha M}{(1+\alpha)} [1 - e^{-(1+\alpha)\beta}] \quad \text{pour } i=0 \quad (4)$$

$$N_i = \frac{1}{(1+\alpha)} \left[N_{i-1} - \frac{\alpha M e^{-(1+\alpha)\beta} \beta^i}{i!} \right] \quad \text{pour } i>0 \quad (5)$$

Accroissement diamétral moyen Δd_i en cm/an de la catégorie de diamètre $5i$:

$$\Delta d_i = 5 \frac{N_{i-1}}{cN_i} \quad \text{pour } i>0, \quad \text{et} \quad \Delta d_0 = 5 \frac{1+\alpha}{c} \quad \text{pour } i=0 \quad (6)$$

Age moyen des arbres de la catégorie de diamètre $5i$ cm :

$$a_i = c(i+1) \frac{N_{i+1}}{N_i} \leq \beta c \quad (7)$$

L'accroissement diamétral moyen $\Delta d(a)$ des arbres de même âge de tous diamètres est égal à $5/c$ cm/an = DE/AE (AE =âge d'exploitabilité ; DE diamètre moyen des arbres d'âge AE).

Le diamètre moyen $d(a)$ en cm des arbres de même âge est :

$$d(a) = 5a/c \quad (8)$$

La coupe annuelle d'éclaircie NC_i dans la catégorie de diamètre $5i$ cm est :

$$NC_i = (1 - e^{-\alpha/c}) N_i \cong \alpha/c N_i \quad (9)$$

La coupe finale annuelle NF_i dans la catégorie de diamètre $5i$ cm est :

$$NF_i = N_i(\beta c) \quad (10)$$

Références bibliographiques

- Assman, E. 1970. – *The principles of Forest Yield Study*. Pergamon Press, Oxford, 506 p.
- Chevrou, R. B., Guéro, M-C., Houllier, F., 1988. – *Utilisation des résultats et des données brutes de l'Inventaire Forestier National*. Service de l'Inventaire Forestier National, 187 p.
- Chevrou, R. B. 1990 a. – *La loi tronquée de De Liocourt*. Ann. Sci. For. 47(3) : 229-239.
- Chevrou R. B. 1990 b. – *De Liocourt law and the truncated law*. - Canadian Journal of Forest Research. vol. 20. pp. 1933-1946.
- Chevrou, R. B. 1992. – *La loi de De Liocourt et la loi tronquée*. Schweiz. Z. Forstwes. 143 (1992) 3 : 219-236.
- Chevrou, R. B. 2013. – *Application de la loi tronquée pour la gestion des peuplements forestiers*. Rev. For. Fr. LXV -1-2013 : 69-82.
- De Liocourt, F. 1898. – *De l'aménagement des sapinières*. Bulletin trimestriel de la Société forestière de Franche-Comté et Belfort (juillet) : 396-409. Texte disponible sur le site : http://infodoc.agroparistech.fr/index.php?lvl=author_see&id=64140
- De Liocourt, F. 1900. – *Sapinières*. Manuscrit non publié. Texte disponible sur le site : http://infodoc.agroparistech.fr/index.php?lvl=author_see&id=64140
- Dulieu, H. 2016. – *Un mystère éclairci : lecture, analyse et commentaires sur le manuscrit de 1900 de De Liocourt*. Bull. Soc. For. Franche-Comté. **480**, 49-63.