Encyclopédie : *Question sur…*

L'optimisation sous contrainte, en agriculture

Fiche *QUESTIONS SUR…* n° 10.08.Q07 | **septembre 2023**

Mots clés : modélisation - programmation linéaire – planification agricole – gestion agricole

En agriculture, tout se tient : on ne peut pas augmenter la superficie d'une culture sans diminuer celle d'une autre, ou supprimer un pesticide sans remettre en cause le système de production.

Pour analyser les conséquences d'un changement, il faut donc gérer une grosse quantité de données en interaction les unes avec les autres.

L'optimisation sous contrainte est souvent un bon outil pour cela, à condition de l'utiliser convenablement !

Définition

L'optimisation sous contrainte est une technique mathématique : étant donné un vecteur x (avec $x = \{x_1... x_j...x_J\} \geq 0$ et une fonction $y = F(x)$, on cherche les valeurs de x qui rendent le nombre y maximum (ou minimum), sachant que les éléments de x doivent vérifier un certain nombre de *contraintes,* c'est-à-dire d'inégalités ou d'égalités, que l'on peut représenter par $G_i(x) \leq b_i$, pour $i = 1…I$. Le nombre J des variables x_j peut être très grand, jusqu'à plusieurs milliers, comme celui I des contraintes.

Lorsqu'on a obtenu les valeurs optimales des x_j qui rendent y maximum (ou minimum), on obtient en même temps deux ensembles de valeurs (notées e_i et v_i pour la contrainte i) associés à chaque contrainte.

- Si la contrainte i est active (en changeant la valeur de b_i, on change tous les résultats, parce que la ressource correspondante est rare), v_i correspond à la *valeur duale* de i, qui indique quel serait l'accroissement de la valeur optimale de y si l'on augmentait d'une unité la quantité de ressource correspondante. Alors, la *variable d'écart* correspondante, e_i, est nulle, puisque toute la ressource correspondante est utilisée.
- Si la contrainte est inactive (on peut modifier son niveau sans rien changer au résultat optimal), alors la *variable d'écart* e_i indique quelle quantité de la ressource correspondante est inutilisée, cependant que la *variable duale* v_i est nulle puisque changer légèrement le niveau de b_i ne changera rien aux résultats.

Solutions et limites

Il existe diverses méthodes bien documentées pour résoudre les problèmes de ce type, du moins quand la solution existe et est finie (la solution n'existe pas si au moins deux contraintes se trouvent en contradiction l'une avec l'autre, comme $x_1 + x_2 > 10$ et $x_1 + x_2 < 0$). Il se peut aussi que la solution soit infinie, si rien n'empêche la fonction F d'augmenter ou de diminuer sans limites.

Ces méthodes sont implémentées dans des logiciels spécialisés, le plus connu étant GAMS (*Generalized Algebrical Modeling System)*, développé par la Banque mondiale dans les années 1970. Cependant, même un logiciel aussi commun qu'Excel offre des facilités dans ce sens.

Un cas particulier est celui où toutes les fonctions en cause – $F()$ et les $G_i()$ – sont du premier degré pour toutes les variables x_j ; on parle alors de problème de *programmation linéaire* : maximiser ou minimiser $F = cx$, vérifiant $Ax \leq b$, et $x \geq 0$. Ici, c est un vecteur ligne, ensemble de nombres c_j, $j = 1...J$, disposé en ligne ; b est un vecteur colonne, ensemble de nombres b_i, $i = 1...I$; A est une matrice, un tableau de nombres avec J colonnes et I lignes. Les problèmes de programmation linéaire sont plus faciles à résoudre que le problème général de l'optimisation sous contrainte, et les logiciels correspondants plus faciles à mettre en œuvre.

Rapports avec l'agriculture

En quoi un tel instrument intéresse-t-il l'agriculture ? La réponse est que beaucoup de problèmes rencontrés en agriculture sont de nature à s'insérer dans ce cadre. Par exemple, au niveau d'une exploitation, chaque année (ou presque) se pose la question de savoir quel devrait être le plan de culture à mettre en œuvre. Les éléments x_i de x (qu'on appelle des *activités,* parce qu'il arrive souvent qu'il s'agisse en effet de différentes activités de production) sont alors les surfaces à attribuer aux différentes cultures, ou les niveaux des emprunts à effectuer, ou les locations à effectuer. Chaque activité j est caractérisée par une recette ou un coût unitaire, soit c_j. Alors le revenu espéré par l'exploitant est $R = \sum c_j x_j$, que l'on cherche à rendre maximum. Mais il est impossible de cultiver n'importe quelle surface de chaque culture, car, évidemment, à chaque saison, la somme des surfaces des cultures ne peut pas dépasser la surface totale de l'exploitation, ni les besoins en travail pour les façons culturales excéder les disponibilités de l'exploitant et de ses employés.

Chacune de ces contraintes s'exprime sous la forme d'une inéquation de la forme $S = \sum a_{ij} x_j \leq d_i$, où a_{ij} représente par exemple les besoins en travail de la culture j à la saison i, tandis que d_i représente les disponibilités en travail à cette même saison.

Le type de problème qui vient d'être défini est familier à tout exploitant. C'est pourquoi, dès que les logiciels adéquats se sont trouvés disponibles, au début des années 1970, ces méthodes ont suscité un très fort intérêt de la part non seulement des exploitants, mais aussi des centres de gestion et des autres services d'assistance aux agriculteurs. On allait enfin pouvoir fournir aux agriculteurs des conseils étayés de façon scientifique, en traitant mathématiquement des problèmes complexes que personne ne saurait résoudre *à la main*. En outre, la même logique peut se poser non seulement au niveau d'une exploitation, mais à celui d'une région, d'un État, ou même du monde. C'est pourquoi, dans les années 1980-2000, se sont multipliés les projets visant à déterminer la meilleure utilisation possible du territoire. On espérait par-là se trouver en mesure de définir des politiques agricoles rationnelles. L'intérêt est cependant vite retombé lorsqu'on s'est rendu compte que satisfaire les seules contraintes de disponibilités en terre, travail et capital ne suffisait pas.

Les limites de l'utilisation en gestion des exploitations : un exemple

Un micro-exemple (réel !) fera comprendre le problème. Il est tiré de l'observation, au Pakistan, de l'exploitation de l'agriculteur Sharif, propriétaire de 5 hectares de terre. Sa famille peut fournir l'équivalent de 5 hommes par an, travaillant chacun 100 jours, et il peut choisir entre 4 cultures, dont les coûts et les produits sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

	Rendement (tonnes/ha, ou roupies/ha)	Coût (roupies par ha)	Prix (roupies par t ou par ha)	Besoins en travail (jours par ha et par an)	Besoins en eau (m^3/ha)
Blé	9	3 120	1 055	40.5	740
Riz	6	5 480	3 276	96	3 000
Canne à sucre	18	11 360	1 686	282	2 200
Élevage	17 000	5 000	1	159	1 100

On évalue à 100 le nombre de jours de travail utiles fournis par an par un ouvrier. Le blé occupe le sol en hiver, le riz en été, les autres cultures toute l'année. Le gouvernement alloue 3 100 m^3 d'eau par exploitation et par an pour l'irrigation. Les fonds propres de Sharif ne dépassent pas 30 000 roupies.

Première simulation

Dès lors, le problème se met sous la forme d'un programme linéaire classique. Le vecteur $c = \{6\ 375, 14\ 176, 18\ 988, 12\ 000\}$ représente les marges brutes par hectare des quatre cultures, dans l'ordre : blé, riz, canne et élevage. La matrice A comporte une ligne par contrainte, donc 5 lignes (surface été, surface hiver, travail disponible, eau, dépenses avant recettes) et autant de colonnes que d'activités, soit 4 (le blé, le riz, la canne et l'élevage). Enfin le vecteur b représente les niveaux de contraintes, c'est-à-dire la surface en terre disponible en été et en hiver ainsi que les disponibilités en fonds de roulement, travail, et droits d'eau.

matrice A (v1) Activités Contraintes	blé par hectare	riz par hectare	canne par hectare	élevage (roupies)		Disponibilités (vecteur b)
Occupation sol été (ha)	0	1	1	1	≤	5
Occupation sol hiver (ha)	1	0	1	1	≤	5
Coût à financer (roupies/ha)	3 120	5 480	11 360	5 000	≤	30 000
Travail (jours/ha)	40.5	96	282	159	≤	500
Eau (m3/ha)	740	3 000	2 200	1 100	≤	3 100

Les résultats sont inattendus : Sharif doit cultiver seulement 2,82 hectares de prairie pour son bétail, pas de canne à sucre, pas de riz, pas de blé... Naturellement, ce n'était pas ce qu'on attendait : si Sharif n'avait rien de mieux à faire que de cultiver seulement 3 hectares sur 5, pourquoi garderait-il les autres ? Il faut donc admettre que le problème ainsi formulé n'a pas de sens ! C'est une situation fréquemment rencontrée lorsqu'on débute une étude de cette sorte. Pourtant, ce résultat est utile, en mettant en évidence l'insuffisance de notre diagnostic sur les contraintes auxquelles doit faire face le paysan Sharif.

Simulations alternatives

De fait, un examen plus attentif des résultats montre que, dans cette formulation, une seule contrainte est active : la quantité d'eau allouée par le gouvernement. Or il est possible d'y remédier en achetant (plus ou moins légalement !) de l'eau à une entreprise de forage qui pompe dans la nappe phréatique l'eau destinée aux canaux "officiels". Cela ne coute que 0.1276 roupies/m^3. On est alors conduit à créer un élément supplémentaire de x, (une activité *achat d'eau*) et donc une colonne supplémentaire de la matrice.

matrice A (v2) Activités Contraintes	blé par hectare	riz par hectare	canne par hectare	élevage par hectare	Achat eau (m^3)		Disponibilités (vecteur b)
Occupation sol été (ha)	0	1	1	1	0	≤	5
Occupation sol hivers (ha)	1	0	1	1	0	≤	5
Liquidités (roupies)	3 120	5 480	11 360	5 000	0.1276	≤	30 000
Travail (jours/ha)	40.5	96	282	159	0	≤	500
Eau (m^3/ha)	740	3 000	2 200	1 100	-1	≤	3 100

Le vecteur c de son côté est augmenté d'un élément supplémentaire qui permet de soustraire le coût de l'eau du bénéfice de l'exploitant. On a donc c = {6 375, 14 176, 18 988, 12 000, -1 276}.

Le plan de culture obtenu est alors plus raisonnable : 5 hectares de riz et 0,339 hectares de blé. Pourtant, il ne correspond pas du tout à celui mis en œuvre par Sharif, qui comporte de la canne à sucre. Sharif est-il donc si stupide qu'il ne voie pas son intérêt ? En fait, l'examen de la solution montre l'extraordinaire productivité d'une roupie de liquidités : la valeur duale associée à la contrainte de liquidité est 1,954, ce qui signifie qu'une roupie supplémentaire de fonds propre permettrait d'augmenter le revenu de presque deux roupies, et donc aurait une rentabilité voisine de 200 %. Cela incite à voir ce qui se passerait si l'on permettait à l'exploitant d'emprunter de l'argent, d'autant que la *Banque agricole du Pakistan* prête à un taux d'intérêt modique, de l'ordre de 5 %.

On n'alourdira pas inutilement cet exposé pour expliquer ici comment le faire. Disons seulement que, avec quelques contraintes additionnelles liées au risque, on obtient un plan de culture optimal assez plausible : 3,62 hectares de riz, 1,38 hectares de canne à sucre, pas d'élevage – soit à peu près le système de production mis en œuvre par Sharif ! On peut donc supposer que ce dernier, quoique non-mathématicien, à force de méditations sur sa situation, a résolu en pratique le problème de programmation linéaire que nous avons eu tant de difficultés à bâtir ; et, de notre côté, nous avons découvert des complications insoupçonnées dans le problème apparemment simple qui se pose à cet agriculteur.

Que conclure de cette histoire ?

L'utilité de ces méthodes pour aider le conseil de gestion en agriculture est donc assez mince, et en fait, les agriculteurs sont en général capables de trouver par eux-mêmes ce qui leur convient…

En revanche, l'outil s'avère un moyen puissant pour découvrir les failles de raisonnements trop simplistes, fréquentes dans les analyses des gens qui conseillent et dirigent les agriculteurs. L'optimisation apporte ainsi la garantie que si, en préparant le modèle, on a oublié une contrainte ou une possibilité importante, alors cela se verra, avec des résultats plus ou moins absurdes, comme ceux évoqués plus haut.

C'est donc là que se trouve la véritable utilité de cet instrument : permettre d'éviter une foule d'erreurs de diagnostic sur la situation réelle de tel ou tel type d'exploitant.

L'utilisation pour la politique agricole

Bien évidemment, on peut songer à utiliser le même type d'instrument pour gérer la *ferme France*, ou tout autre espace géographique, ainsi que pour définir les meilleurs moyens pour obtenir un résultat donné. Par exemple, on pourrait songer à définir un plan de culture national pour minimiser les émissions de gaz à effet de serre du secteur agricole. On peut même viser un modèle mondial, qui engendrerait un système optimal pour les échanges internationaux de matières premières agricoles : cela a été tenté par l'OMC (*Organisation mondiale du commerce*), en vue de "vendre" la libéralisation des échanges agricoles.

Hélas, la plupart du temps, les modèles reposent sur une analyse insuffisante des situations dans lesquelles se trouvent les agriculteurs, et conduisent à des prescriptions que ces derniers n'ont nullement intérêt à mettre en œuvre !

En revanche – et c'est un intérêt majeur de la méthode – il est possible de construire des modèles pour chaque type d'exploitation recensé dans une zone donnée. On peut en vérifier la pertinence, comme on l'a vu plus haut. Si de tels modèles donnent des solutions voisines de ce que font effectivement les agriculteurs dans une situation donnée, alors on peut s'en servir pour voir ce qui se passerait dans une situation différente, et cela avec une bonne chance de réalisation le cas échéant.

Cette méthode permettrait donc d'éviter de se trouver dans une situation hélas assez classique en matière de politique agricole : une mesure est décidée par un gouvernement avec d'excellentes intentions, mais les agriculteurs l'utilisent d'une façon imprévue, avec des conséquences non désirées et même dommageables. Prédire une telle situation permettrait d'améliorer le cadre législatif et réglementaire, et de rechercher les mesures vraiment efficaces à prendre. L'application de l'optimisation sous contrainte à un panel permanent d'exploitations-types permettrait souvent de le faire.

Jean-Marc BOUSSARD, membre de l'Académie d'Agriculture de France

Ce qu'il faut retenir :

Contrairement à une vision erronée très répandue (en particulier dans les ministères de l'Agriculture du monde entier !), les agriculteurs utilisent en général assez efficacement (de leur point de vue) les moyens de production dont ils disposent.

Il ne faut donc pas espérer augmenter beaucoup leur productivité en utilisant des instruments mathématiques pour leur dicter des décisions. En revanche, l'optimisation sous contrainte – en poussant jusqu'à l'absurde les conséquences logiques de ce que l'on croit être le problème vécu par les agriculteurs – est très utile pour comprendre les raisons qui conduisent ces derniers dans telle ou telle direction, éventuellement non souhaitée. Un tel instrument peut donc être pertinent dans l'élaboration des politiques agricoles, pour tester l'efficacité des incitations envisagées afin obtenir un objectif donné.

Pour en savoir plus sur les techniques de construction de modèles :

Jean-Marc BOUSSARD et J.J. DAUDIN : *La programmation mathématique dans les modèles de production*, Masson, 1988.

Jean-Marc BOUSSARD : Un modèle du comportement des agriculteurs et son application à la politique agricole. *Cahiers du Séminaire d'Econométrie du CNRS*. 13 : 97-117, 1971.

Pour en savoir plus sur un exemple (fameux) d'utilisation dans un domaine historique :

R-H. DAY : The Economics of Technological Change and the Demise of the Sharecroppers, *American Economic Review* 57(3) : 447-449, 1967.

Pour en savoir plus sur une application en économie du développement :

Jean-Marc BOUSSARD, J. BOURLIAUD, et J. LEBLANC : La programmation linéaire comme outil descriptif du comportement des agriculteurs : une étude pilote au Sénégal, *Mondes en développement*, 17 : 51-74. 1977.

Pour en savoir plus sur les aspects dynamiques :

Jean-Marc BOUSSARD : Time horizon, objective function, and uncertainty in a multiperiod model of firm growth, *American Journal of Agricultural Economics*, 53 (3) : 45-58, 1971.

Pour en savoir plus sur le risque et l'optimisation :

Rudolf J FREUND : The introduction of risk into a programming model. *Econometrica* 21 (4) : 253-263, 1956.

Pour en savoir plus sur les aspects politiques :

N. ELBENNI, C. GROVERMANN et R. FINGER : Die Rolle agrarökonomisher Forshung in der Politikgestaltung (Le rôle de la recherche agroécologique dans l'élaboration des politiques), *Agrarforschung Schweiz* 14 : 172-182, 2023.